



Reflexión docente de una situación de enseñanza y aprendizaje sobre el concepto de relación en educación secundaria

Teacher reflection on a teaching-learning situation regarding the concept of relation in secondary education

Reflexão docente de uma situação de ensino e aprendizagem sobre o conceito de relação no ensino médio

Miguel Picado-Alfaro¹, José Romilio Loría-Fernández¹, Jonathan Espinoza-González¹

Received: Feb/4/2021 • Accepted: Jun/8/2021 • Published: Jan/31/2022

Resumen

Este estudio se enmarca en las investigaciones en didáctica de la matemática sobre la formación de docentes. Particularmente, se enfoca el conocimiento de esta población tomando como referente los planteamientos teóricos del modelo denominado conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK) y de la reflexión docente como competencia profesional. Corresponde a una investigación cualitativa descriptiva, basada en un estudio instrumental de casos, cuyo propósito es describir y analizar las manifestaciones de docentes de matemática de educación secundaria al observar una situación de enseñanza-aprendizaje que muestra a un profesor cuando enseña el concepto de relación. Para esto, se utilizaron las narrativas escritas por siete docentes de matemática de educación secundaria en servicio, las cuales señalan aspectos identificados como relevantes de la situación observada. El análisis de la información se realizó mediante la definición de categorías, subcategorías y unidades de análisis basadas en los componentes del modelo MTSK. Los resultados muestran que las personas docentes participantes acentúan, en las manifestaciones registradas en las narrativas, atributos asociados principalmente al conocimiento didáctico del contenido matemático. La reflexión de este grupo de docentes se caracteriza desde tres aspectos específicos del modelo MTSK: la enseñanza, el aprendizaje y el conocimiento de los temas. Se interpreta que la reflexión se ha visto influenciada por la experiencia profesional de las personas docentes participantes en el estudio.

Palabras clave: Conocimiento especializado del profesor de matemáticas; reflexión docente; relación; narrativas; educación secundaria.

Abstract

This study is part of the research in *didactics of mathematics* on teacher training. In particular, the study focuses on the knowledge of mathematics teachers, taking as a reference the theoretical approaches of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model and teacher reflection as a professional

Miguel Picado-Alfaro, ✉ miguel.picado.alfaro@una.cr, Orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0002-7574-0797>
José Romilio Loría-Fernández, ✉ jose.loria.fernandez@una.cr, Orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0002-3135-451X>
Jonathan Espinoza-González, ✉ jonathan.espinoza.gonzalez@una.cr, Orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0003-0082-4926>
1 Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.



competence. The study corresponds to a descriptive-qualitative research, based on an instrumental study of cases, whose purpose is to describe and analyze the manifestations of mathematics teachers of Secondary Education when they observe a teaching-learning situation that shows a teacher of mathematics teaching the concept of relation. For this, narratives written by seven Secondary Education mathematics teachers in service were used, which indicate some aspects identified by them as relevant from the observed situation. The analysis of the gathered information was carried out by defining categories, subcategories, and analysis units based on the components of the MTSK model. The results indicate that participating teachers accentuate, in their manifestations, attributes mainly associated with didactic knowledge of mathematical content. The reflection of this group of teachers is characterized by three specific aspects of the MTSK model: teaching, learning, and knowledge of the topics. It is interpreted that teacher reflection has been influenced by the professional experience of the teachers participating in the study.

Keywords: Mathematics teachers' specialized knowledge; Noticing; Relation; Narratives; Secondary Education.

Resumo

Este estudo se enquadra nas pesquisas em didática da matemática sobre a formação de docentes. Particularmente, está enfocado no conhecimento desta população tendo como referência as exposições teóricas do modelo denominado conhecimento especializado do professor de matemática (MTSK) e da reflexão docente como competência profissional. Corresponde a uma pesquisa qualitativa descritiva, baseada em um estudo instrumental de casos, cujo propósito é descrever e analisar as manifestações de docentes de matemática do ensino médio ao observar uma situação de ensino-aprendizagem que um professor mostra ao ensinar o conceito de relação. Para isso, foram utilizadas as narrativas escritas por sete docentes de matemática do ensino médio em serviço, que destacam aspectos identificados como relevantes da situação observada. A análise das informações foi realizada mediante a definição de categorias, subcategorias e unidades de análises baseadas nos componentes do modelo MTSK. Os resultados mostram que as pessoas docentes participantes destacam, nas manifestações registradas nas narrativas, atributos associados principalmente ao conhecimento didático do conteúdo matemático. A reflexão deste grupo de docentes se caracteriza a partir de três aspectos específicos do modelo MTSK: o ensino, a aprendizagem e o conhecimento dos temas. A interpretação é que a experiência profissional influenciou na reflexão das pessoas docentes participantes no estudo.

Palavras-chave: Conhecimento especializado do professor de matemáticas; reflexão docente; relação; narrativas; ensino médio.

Introducción

Recientemente, diversas investigaciones sobre el conocimiento de la persona docente de matemáticas han puntualizado la importancia de que esta posea un fuerte conocimiento del contenido matemático, complementado con un conocimiento particular para la enseñanza de ese contenido.

Con especificidad, Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contre-ras (2013) señalan la existencia de una pluralidad de perspectivas y conceptualizaciones desde las cuales es posible abordar el conocimiento de la persona docente de matemáticas; sus estudios presentan el modelo denominado *conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas* (en adelante, MTSK



por su siglas en inglés). El MTSK se considera como el “conocimiento especializado ‘ideal’ que requiere un profesor de matemática para la gestión del proceso de enseñanza teniendo como objetivo, entre otros, que sus alumnos entiendan los porqués de las cosas” (Galleguillos, Ribeiro y Montes, 2015, p. 2).

Pero, ¿cómo se puede identificar este conocimiento en docentes de matemáticas? Linares (2016) acentúa que la manera en que la persona docente conoce y utiliza su conocimiento incide en las formas que implementa para mostrar ese conocimiento matemático a sus estudiantes y en la flexibilidad que muestra para atender a sus cuestiones o consultas. Es decir, el análisis del comportamiento del profesorado en la práctica puede dar muestras o indicadores de este conocimiento especializado para enseñar matemáticas. Una manera de analizar este comportamiento es a través de la reflexión docente sobre la práctica educativa.

Ahora, como indica Dolk (1997), se consigue beneficiar el desempeño de la profesión cuando se promueve la reflexión sobre diversas experiencias de clase y del origen del comportamiento de la persona docente en la práctica; esto, a partir de la estructura sistemática que provee la reflexión desde las dimensiones cognitiva, emocional, volitiva y conductual, y cuando se potencian el estímulo a la meta-reflexión y al aprendizaje reflexivo entre pares. Este beneficio puede atribuirse al conocimiento y desempeño de quien reflexiona; es decir, de docentes que reflexionan sobre su propia práctica o de quienes reflexionan sobre la práctica de otras personas docentes. De esto, destacamos la reflexión que puede hacerse de ciertas experiencias de clase a partir de la dimensión cognitiva (del conocimiento profesional del profesor de matemática), orientada al análisis reflexivo entre pares.

En el caso particular de este artículo, se considera como experiencia de clase a una lección en la que un profesor de matemáticas presenta una tarea —en adelante, el profesor observado—, para introducir el concepto de relación matemática, a un grupo de estudiantes de educación secundaria. Se desea enfatizar en los aspectos que son relevantes para un grupo de profesores y profesoras de matemáticas que reflexionan sobre el desempeño del profesor observado.

En este contexto nos cuestionamos: ¿qué aspectos destaca un grupo de docentes de matemáticas cuando observa la grabación de una lección de matemáticas?, ¿qué aspectos enfatiza este grupo de docentes cuando reflexiona sobre el desempeño del profesor observado que enseña matemáticas? Tomando como punto de partida la experiencia docente de quienes participan en el estudio, nos interesa reconocer aquellos aspectos vinculados con el conocimiento del contenido matemático y con el conocimiento didáctico del contenido que resaltan estas personas docentes al mirar una situación de enseñanza sobre el concepto de relación.

El propósito de este artículo es mostrar, a partir de un estudio exploratorio, los aspectos matemáticos y didácticos del desempeño docente que identifica un grupo de profesores y profesoras de matemáticas al mirar un segmento de la grabación de una clase, en la que se muestra a un profesor de esta asignatura introduciendo el concepto de relación mediante la resolución de una tarea auténtica.

Marco teórico

Los referentes teóricos de esta investigación se fundamentan en las propuestas sobre el modelo del conocimiento denominado *conocimiento especializado del*



profesor de matemáticas y la reflexión docente. Ambas nociones se entrelazan para ofrecer un marco de referencia para analizar situaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Conocimiento especializado de la persona docente de matemática

En el campo de la educación, se concibe el conocimiento del profesorado como aquellos saberes y experiencias que utiliza con el propósito de producir aprendizaje y crecimiento en el estudiantado (Climent, 2002). En este sentido, la forma en que la persona docente conoce y usa el conocimiento que posee repercute en cómo enseña los contenidos al alumnado, cómo responde a sus preguntas y cómo les ayuda a relacionar las ideas matemáticas entre sí (Llinares, 2016).

Shulman (1986, 1987) destaca la necesidad de que el profesorado posea tanto un conocimiento del contenido que enseña, así como un conocimiento que lo capacite para enseñar ese contenido. El primero dota al profesorado de herramientas para conocer de forma precisa las definiciones, además le permite justificar proposiciones y conocer aplicaciones del contenido en otras disciplinas; mientras que el segundo le permite seleccionar la manera más adecuada de presentar los contenidos al estudiantado, considerando sus habilidades y limitaciones, así como la diversidad de intereses de este.

En el presente estudio, se aborda el conocimiento del profesorado de matemáticas a partir del modelo MTSK propuesto por Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano y Montes (2014). El MTSK es una propuesta teórica que modela el conocimiento núcleo del conocimiento profesional del profesorado de matemáticas y además es una herramienta metodológica que permite analizar la práctica docente a

través de sus distintas categorías. Este modelo del conocimiento mantiene la separación propuesta por Shulman (1986) en dos dominios de conocimiento: el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, particularizado a las matemáticas. Se destaca porque considera la especialización del profesorado en cada uno de los subdominios del conocimiento, debido a esto, concibe el carácter especializado como la intersección de conocimientos matemáticos y didácticos específicos para el profesorado de matemáticas. En este sentido, se entiende por especializado “cualquier conocimiento de índole matemático que el profesor pudiera requerir en su labor profesional” (Escudero *et al.*, 2015, p. 57). Además, se distingue de otros modelos de conocimiento del profesorado de matemáticas porque propone un sistema de categorías y subcategorías para cada uno de estos dominios de conocimiento, lo cual lo hace útil como modelo analítico para interpretar y caracterizar el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas. El MTSK también propone el subdominio sobre las creencias y concepciones hacia las matemáticas.

A continuación, se detalla la caracterización del MTSK, enfocando los subdominios del conocimiento matemático y del conocimiento pedagógico del contenido. Respecto al subdominio de las creencias y concepciones sobre las matemáticas, este no ha sido considerado para la presente investigación.

Conocimiento matemático

El conocimiento matemático (MK, por sus siglas en inglés) se define como “el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar” (Escudero *et al.*, 2015, p. 71). Diversos modelos de conocimiento convergen en señalar que existe una



diferencia entre la forma de conocer el contenido matemático por parte de la persona docente y la de otros usuarios de la disciplina como, por ejemplo, un ingeniero (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Aguilar, Carrillo, 2014). Su importancia se debe a que el profesorado con un fuerte conocimiento matemático tiene mayores herramientas para lograr que sus estudiantes comprendan significativamente el contenido y, además, demuestra un conocimiento profundo de las matemáticas cuando brinda distintos puntos de vista sobre el tema.

En el MTSK se consideran tres subdominios: el conocimiento de los temas (KOT, por sus siglas en inglés), el conocimiento de la estructura matemática (KSM, por sus siglas en inglés) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM, por sus siglas en inglés).

Respecto al KOT, se parte de la premisa que el profesorado debe conocer el contenido matemático que enseña a sus estudiantes. Considera el qué y cómo el profesorado de matemáticas conoce el contenido que va a enseñar y refiere al conocimiento del contenido matemático y sus significados de manera fundamentada. Se compone del contenido que aprenderá el estudiantado con un nivel de profundización mayor. Se entiende, por temas, los contenidos provenientes de los bloques de conocimiento tradicionalmente considerados en las matemáticas escolares. En el caso del currículo costarricense: números, relaciones y álgebra, geometría, medidas y estadística y probabilidad.

Se consideran cinco aspectos que caracterizan este conocimiento: fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos. La fenomenología es el conocimiento del profesorado sobre situaciones asociadas al tema, así como de sus

usos y aplicaciones. El conocimiento sobre propiedades y sus fundamentos refiere al conocimiento sobre la argumentación matemática de los atributos o cualidades de un concepto o procedimiento. Los registros de representación corresponden al conocimiento sobre las distintas formas en que se puede hacer presente un concepto, incluyendo la notación y el lenguaje matemático vinculado a dichas representaciones. El conocimiento sobre definiciones refiere al conjunto de propiedades que definen un objeto matemático, considera también las formas alternativas que utilice el profesorado para definirlo. Por último, el conocimiento sobre procedimientos considera el conocimiento de algoritmos tradicionales y alternativos, las condiciones necesarias y suficientes y los argumentos de índole matemático que permiten su uso, así como las peculiaridades del objeto matemático que resulta al aplicar el procedimiento.

El KSM es el conocimiento de las relaciones entre distintos contenidos de un mismo nivel o de diferentes niveles educativos. Enfatiza exclusivamente las conexiones entre temas matemáticos. Se proponen cuatro categorías de conexiones matemáticas. Las conexiones de complejización son el conocimiento sobre las formas en que se relacionan los contenidos enseñados con contenidos posteriores, mientras que las conexiones de simplificación son el conocimiento sobre la forma en que se relacionan los contenidos enseñados con contenidos anteriores. Las conexiones de contenidos transversales se refieren a una cualidad común que poseen dos o más contenidos que los relaciona, entre ellos, los modos de pensamientos asociados a dichos contenidos. Por último, las conexiones auxiliares se vinculan al conocimiento sobre el uso de conceptos como herramientas para el desarrollo de otros.



Respecto al KPM, es el conocimiento sobre las formas de proceder en matemáticas, así como las características del trabajo matemático.

Se trata de saber cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, qué papel tiene el convenio, y qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas (como una definición o una demostración. (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Aguilar, Carrillo, 2014, p. 77-78)

Este subdominio se compone de dos categorías: prácticas ligadas a la matemática en general y prácticas ligadas a una temática en matemáticas. La primera es un tipo de conocimiento usado para trabajar de forma genérica en matemática, independientemente del concepto abordado; mientras que la segunda categoría es un conocimiento sobre formas de proceder en un contenido matemático particular.

Conocimiento didáctico del contenido matemático

El conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK, por sus siglas en inglés), es el conocimiento del profesorado sobre aspectos vinculados con el contenido matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje. Se caracteriza por ser un conocimiento propio de la labor docente, por lo que está vinculado directamente con el profesorado. Concibe el contenido matemático desde tres focos: como un contenido a enseñar, como un contenido a aprender y como un componente de los estándares de aprendizaje que se pretenden alcanzar. Estos tres

énfasis generan los tres subdominios de este dominio de conocimiento: conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT, por sus siglas en inglés), conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM, por sus siglas en inglés) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, por sus siglas en inglés). A continuación, se detallan los aspectos que los caracterizan.

El KMT refiere al conocimiento sobre recursos, materiales y estrategias para presentar el contenido al estudiantado, así como el potencial que estos tienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje. También considera el conocimiento acerca de tareas, concebidas como oportunidades de aprendizaje. Este subdominio se compone de tres categorías: (a) teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, que corresponde al conocimiento sobre teorías de enseñanza específicas para la enseñanza de las matemáticas; también, considera estrategias de enseñanza provenientes de planteamientos personales del profesorado como el uso de analogías o metáforas, adquiridas a partir de su experiencia profesional; (b) recursos materiales y virtuales asociados al contenido a enseñar, considera el conocimiento de los beneficios y dificultades asociadas a su uso en la enseñanza de un contenido matemático, y (c) actividades, tareas, ejemplos y ayudas, la cual refiere al conocimiento sobre la potencialidad de una tarea, ejemplo o actividad, así como en qué momento y qué tipo de ayuda brindar al estudiantado durante su aprendizaje.

Respecto al KFLM, corresponde al conocimiento sobre las características de aprendizaje propias del contenido matemático; enfoca el contenido matemático como objeto de aprendizaje, por lo que su interés son las características de aprendizaje



provocadas por la interacción del estudiantado con el contenido matemático y no las características del estudiantado en sí mismo. Se compone de cuatro categorías: (1) formas de aprendizaje, (2) fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, (3) formas de interacción del estudiantado con el contenido matemático y (4) concepciones del estudiantado sobre las matemáticas.

Las formas de aprendizaje se relacionan con las posibles formas de aprehensión vinculadas a la naturaleza del contenido matemático y consideran el conocimiento de teorías personales o institucionalizadas sobre el desarrollo cognitivo del estudiantado, tanto para las matemáticas en general como para un contenido en particular. Las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje refieren al conocimiento sobre errores y dificultades atribuidas tanto a las matemáticas en general como a un contenido en particular. El conocimiento sobre las formas de interacción del estudiantado con el contenido matemático se asocia al conocimiento sobre procedimientos y estrategias, tanto típicas como no habituales, utilizadas por el estudiantado, así como el lenguaje que emplean al manipular el contenido matemático. Por último, las concepciones del estudiantado sobre las matemáticas destacan las expectativas e intereses de este hacia las matemáticas.

Los estándares de aprendizaje de las matemáticas corresponden al conocimiento sobre el nivel conceptual que se espera que aprenda el estudiantado en un momento escolar determinado. Este subdominio considera tres categorías: (a) contenidos matemáticos que se requieren enseñar, que es el conocimiento sobre los contenidos matemáticos que se deben enseñar en un grado escolar específico; (b) nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, que corresponde al conocimiento sobre el

grado de detalle con el que se debe impartir un contenido en un determinado momento escolar, y (c) secuenciación de diversos temas, que acentúa el conocimiento sobre lo que el estudiantado debe o puede aprender en un momento escolar determinado o en uno anterior o posterior a este.

En resumen, el MTSK considera la especialización del conocimiento del profesorado como aquel conocimiento que solo tiene sentido para este y que cobra sentido cuando desarrolla su labor docente.

La competencia de la reflexión docente

La reflexión docente se concibe como la competencia profesional que permite la identificación de aspectos matemáticos relevantes en una situación de enseñanza y aprendizaje, interpretarlos desde un referente teórico y aportar cambios para mejorarlos. En este sentido, esta competencia docente se vincula con tres destrezas: (1) identificar eventos sobresalientes que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, (2) razonar sobre las interacciones en el aula a partir del conocimiento que se tenga del contexto en que se realiza la enseñanza y (3) conectar sucesos específicos del aula con principios e ideas más generales de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Sherin, Jacobs y Philipp, 2011).

En la bibliografía pueden encontrarse distintos términos para referirse a la reflexión docente, entre los cuales pueden destacarse “Noticing” (Mason, 2002), “Mirar profesionalmente” o “Mirar con sentido” (Llinares, 2012, 2013, 2016).

Esta competencia docente permite al profesorado de matemáticas analizar prácticas educativas de manera profesional, distinguiéndose de quienes no son profesionales en esta área (Mason, 2002). El carácter profesional se debe al uso del conocimiento



para identificar, interpretar y ofrecer opciones de mejora sobre aspectos destacables de una situación vinculada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, [Llinares \(2016\)](#) afirma:

Esta manera de plantear la relación entre las acciones cognitivas de identificar, registrar e interpretar aspectos particulares de las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas hace más explícita la necesidad de considerar el papel que desempeñan el conocimiento de matemáticas y el de didáctica de las matemáticas como referencias de la observación y de la interpretación de los hechos identificados y descritos. (p. 218)

Debido a lo anterior, la competencia de la reflexión docente es una demostración del uso del conocimiento del contenido matemático y del conocimiento didáctico del contenido de la persona docente (conocimiento especializado) en situaciones de enseñanza, destacándose el vínculo entre el conocimiento profesional y los contextos de su uso ([Ball, Thames y Phelps, 2008](#); [Hill, Ball y Schilling, 2008](#); [Sherin, 2001](#); [Sherin, Jacobs y Philipp, 2011](#)).

Otro aspecto que caracteriza la competencia de la reflexión docente es que su desarrollo no se realiza de forma espontánea en el profesorado, sino que es necesario desarrollarla desde la formación inicial, con su inclusión en los programas de formación y a lo largo de la vida profesional ([Llinares, 2013](#)).

Para apoyar el desarrollo de la competencia de la reflexión docente, [Llinares \(2016\)](#) refiere al uso de “productos de la práctica” o “artefactos de la práctica”. Un artefacto de la práctica puede ser un fragmento de video que muestra la interacción entre un grupo de estudiantes y una persona

docente cuando resuelven un problema matemático, las producciones del estudiantado, la secuencia de actividades utilizadas por la persona docente para introducir un tema e incluso su planeamiento didáctico.

Los productos de la práctica se consideran herramientas útiles para el desarrollo de la competencia de la reflexión docente, ya que permiten explorar y analizar los fenómenos que ocurren durante la práctica educativa, sin tener la presión de tomar decisiones rápidamente; además, ofrecen contextos en los cuales el profesorado puede usar su conocimiento profesional para identificar e interpretar sucesos, tomar decisiones de acción y ser más conscientes de los fenómenos que ocurren en el aula, así como para llevar a la práctica ideas teóricas provenientes, por ejemplo, de la didáctica de las matemáticas e integrarlas posteriormente a los procesos de enseñanza y aprendizaje en contextos de aplicación reales ([Llinares, 2016](#)).

En esta investigación se utilizó un segmento de video como artefacto de la práctica. Esta muestra la enseñanza que realiza un docente de educación secundaria sobre una tarea contextualizada vinculada al concepto de relación. En particular, el uso de segmentos de video que presentan prácticas educativas permite, a partir de su análisis, reconocer la complejidad de los fenómenos que ocurren durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. Además, su uso promueve la habilidad de identificar aspectos claves de la situación observada y activa en el sujeto observador referentes teóricos que mejoran la integración de conocimientos teóricos y prácticos. También, brindan la posibilidad de observar los eventos tantas veces como se desee, lo cual permite identificar situaciones que generalmente pasan inadvertidas por el propio profesorado en el aula ([Climent, et al., 2013](#)).



Metodología

La investigación es cualitativa y se desarrolla desde el paradigma interpretativo, constituyéndose como un estudio de carácter descriptivo. Se desea comprender, interpretar y describir los aspectos vinculados al conocimiento del contenido matemático y al conocimiento didáctico del contenido, que destaca un grupo de docentes de matemáticas en servicio al analizar una situación de enseñanza sobre el concepto de relación. De esta manera, el problema que se plantea es práctico, por lo cual, la investigación debe exclusivamente partir de una descripción profunda de este (Abreu, 2012; Jiménez, 1998). Este paradigma se caracteriza por no pretender generalizar la información, su finalidad es explicar los diversos significados y hechos, observando el comportamiento de los sujetos de estudio; de esta manera, se pueden describir las conductas que responden a los objetivos de la investigación (González-Monteagudo, 2001; Ricoy-Lorenzo, 2006).

Las investigaciones cualitativas siguen un proceso inductivo, donde es necesario explorar y describir el fenómeno en estudio, desde lo particular a lo general. Este proceso se pule mediante el avance de la investigación, donde el objetivo no es probar una hipótesis, sino mostrar los resultados de los datos obtenidos (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Por su parte, Ricoy-Lorenzo (2006) describen el enfoque cualitativo como un “fenomenologismo (comprensión), interesado en comprender la conducta humana desde el propio marco de referencia del que actúa ..., no generalizable, se queda en estudio de casos aislados” (p. 13). Dentro de este orden de ideas se destaca que, entre los métodos de recolección de la información, en el enfoque cualitativo quien

investiga juega un papel importante, al ser un ente activo que observa los procesos sin alterar los resultados es una mirada externa a la opinión de los sujetos involucrados.

En detalle, el problema de investigación se aborda desde los estudios de caso. Estos son pertinentes y se adecúan al estudio de la realidad educativa, a partir del análisis de la complejidad de un caso singular (una persona estudiante, una persona docente o un programa) para comprender su actividad en distintas circunstancias (Stake, 1998).

Particularmente, la investigación desarrollada corresponde a un estudio instrumental de casos, pues “pretende aportar luz sobre algunas cuestiones o el refinamiento de una teoría. El caso [fue] seleccionado como típico de otros casos [y su] elección ... se realiza para avanzar en la comprensión de aquello que nos interesa” (Buendía, Colás y Fuensanta, 1998, p. 257).

Con el análisis de las narrativas elaboradas por las personas docentes participantes –los casos– se aporta información que caracteriza la competencia reflexión docente, a partir de la delimitación de las manifestaciones de conocimiento, según el modelo MTSK.

Participantes

La selección de las personas docentes participantes en el estudio obedece a las siguientes condiciones: (1) interés y disponibilidad para participar en la investigación, (2) trabajar en una institución pública o privada de educación secundaria, (3) laborar en una institución pública con nombramiento en plaza fija o bien con contrato de trabajo anual, (4) contar con al menos cinco años de experiencia profesional y (5) haber enseñado el contenido de funciones. Estas son una adaptación de la propuesta de Rojas, Carrillo y Flores (2012), para la selección



de una persona docente de matemáticas experta. En total participaron siete personas docentes que cumplen tales requerimientos, que son identificadas como P1, P2, P3, P4, P5, P6 y P7.

Recolección de la información

La información se recolectó de manera individual. Cada docente participante recibió un enlace para acceder a un sitio virtual que alojaba un segmento de video y el instrumento de recolección de información.

El segmento de video, de aproximadamente seis minutos de duración, muestra a un profesor introduciendo el concepto de relación mediante la resolución de una tarea auténtica. Las personas participantes podían mirar el video cuantas veces fuera necesario y manipularlo (pausar, retroceder, adelantar) según el proceso de reflexión.

Por su parte, el instrumento correspondía a una *guía narrativa*. Las guías narrativas son relatos de una historia, donde cada sujeto describe lo que considera importante de lo observado; la función principal de la narrativa es crear una relación entre el recuerdo y la reflexión de un tema en específico; esto, de una manera secuencial (Ivars, Fernández y Llinares, 2016). En este caso, la guía narrativa detallaba las indicaciones para analizar el desempeño del profesor observado y registrar las consideraciones personales (ideas, pensamientos, puntos de vista), conocimientos adquiridos en su formación o experticia, entre otros. Esta se componía de dos columnas: una para el registro del tiempo exacto en que la persona participante observa algún aspecto considerado de importancia para la reflexión, y otra para la descripción de este aspecto.

Análisis de la información

Uno de los referentes teóricos del estudio es el MTSK, el cual propone un sistema de categorías y subcategorías para analizar y caracterizar el conocimiento especializado de la persona docente de matemáticas. Dichas categorías y subcategorías fueron adaptadas al tema de investigación y codificadas en unidades de análisis con las que se clasificaron los datos obtenidos, para su posterior interpretación.

Con respecto al conocimiento sobre el contenido matemático se consideraron los siguientes subdominios:

- *Conocimiento del tema*. Se describe a partir de cinco categorías: conocimiento sobre el sentido y modos de uso, conocimiento sobre propiedades, conocimiento sobre representaciones, conocimiento sobre definiciones y conocimiento sobre procedimientos.
- *Estructura matemática*. Se describe a partir de tres categorías: enlace potenciador, enlace transversal y enlace instrumental.
- *Práctica matemática*. Se describe a partir de dos categorías: generalidad y particularidad matemáticas.

En relación con el conocimiento didáctico del contenido matemático consideramos los siguientes subdominios:

- *Enseñanza de la matemática*. Se describe a partir de tres categorías: metodologías de enseñanza, medios para la enseñanza y tareas para la enseñanza.
- *Aprendizaje de las matemáticas*. Se describe a partir de cuatro categorías: formas de aprendizaje, fortalezas y limitaciones, interacción del estudiante con el contenido matemático y



concepciones del estudiantado sobre las matemáticas.

- *Estándares de aprendizaje de las matemáticas*. Se describe a partir de dos categorías: conocimiento de los contenidos matemáticos que se requieren enseñar y secuencias de los temas.

El objeto de análisis corresponde a cada una de las reflexiones que las personas docentes realizan en sus narrativas. De esta manera, para la investigación se plantearon cuatro fases que organizan el análisis de los datos. Las fases para el análisis se fundamentan en la propuesta de Caraballo (2014) y son cuatro: (1) *Recolección*, en esta fase se realiza el trabajo de campo con los distintos instrumentos; para este estudio consistió en completar la guía narrativa, a partir de lo observado en el segmento de clase. (2) *Organización*, en esta fase se transcriben los datos recolectados en las guías narrativas, se categorizan las unidades de análisis y se describe cada una de ellas. (3) *Procesamiento*, en esta fase se analiza el contenido de cada unidad de análisis, y se decide la presentación que van a tener estas. (4) *Interpretación*, en esta fase se identifican los patrones que tienen los datos recolectados y se describen los hallazgos encontrados.

De esta forma, ya categorizados los enunciados producidos por el profesorado en servicio, se realiza un análisis de contenido. Bardin (2002) manifiesta que en el análisis de contenido cualitativo se estudian pequeños fragmentos de texto, donde el estudio que se realiza ya no es únicamente descriptivo, sino que se debe tomar a conciencia, intentando aplicar la inferencia a cada uno de los datos obtenidos.

Resultados

Desde la perspectiva adoptada para el estudio, el análisis realizado toma como bases las propuestas sobre la reflexión docente (Llinares, 2016; Mason, 2002) y el modelo MTSK (Carrillo *et al.*, 2014). De allí que, a partir de su experiencia docente, el profesorado participante identifica aspectos relevantes de una situación de enseñanza y aprendizaje en matemáticas, que luego interpreta para emitir afirmaciones y sugerencias –registradas en las narrativas– que aporten al desempeño del profesor observado. Estos registros proporcionaron la información que fue analizada desde las categorías del MTSK.

En función de lo planteado, los resultados del análisis se organizan en dos secciones correspondientes a los dominios de conocimiento del MTSK: del contenido matemático y didáctico del contenido. Cada uno de estos apartados destaca los hallazgos sobre los subdominios que componen cada dominio de conocimiento.

Dominio del conocimiento del contenido matemático

La información mostrada en las narrativas elaboradas por las personas docentes participantes, que apunta hacia el reconocimiento de un contenido matemático desde la perspectiva matemática como disciplina científica, resalta evidencias asociadas principalmente al conocimiento del tema que manifiestan seis de estas personas. Como se indica en la Tabla 1, las manifestaciones asociadas al conocimiento sobre estructura y práctica matemática se identifican en menor cantidad.

A continuación, se describen las principales evidencias asociadas a cada una de las categorías definidas dentro del



subdominio de conocimiento del contenido matemático. Para cada una de estas se incluyen ejemplos textuales con los aportes dados por las personas docentes que participaron en el estudio. Estos ejemplos son tomados de las narrativas elaboradas por este grupo de participantes, y fueron presentadas en un formato digital.

Conocimiento del tema

Los resultados obtenidos sobre el conocimiento del contenido matemático de manera fundamentada muestran que las personas docentes participantes resaltan aspectos vinculados a las categorías consideradas, con excepción de la categoría sobre propiedades, se encontraron diferencias significativas en la frecuencia con la que las personas participantes realizan comentarios vinculados a este conocimiento. A continuación, se presentan los resultados obtenidos según las subcategorías consideradas para este conocimiento.

Conocimiento sobre el sentido y modos de uso

De las narrativas analizadas, las personas docentes participantes P2, P3, P4 y P5 identifican aspectos que pueden vincularse con fenómenos asociados al tema (situaciones), o destacan diferentes formas de utilizar y aplicar el concepto matemático (contextos). En relación con lo expuesto, dos de estas personas destacan el uso de la situación en la que está inmerso el problema. A continuación, se exponen algunas frases tomadas de las narrativas que ejemplifican las ideas planteadas.

Participante P4: “bien contextualizado el problema y oportuno por ser de la vida cotidiana”.

Tabla 1. *Clasificación de las manifestaciones de las personas docentes participantes según los subdominios del conocimiento del contenido matemático de MTSK*

Subdominio	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Total
Del tema	1	1	3	3	4	0	0	12
Estructura matemática	1	0	1	2	1	0	0	5
Práctica matemática	1	0	0	1	2	2	0	6

Nota. P=Persona docente participante.

Participante P5: “el tema del problema es muy bueno para introducir los elementos básicos de funciones, términos y conceptos”.

También, cabe considerar que la identificación de las situaciones y de los contextos se realiza de forma implícita por parte de quienes han participado en el estudio, ya que no mencionan una situación o contexto específico del tema.

Conocimiento sobre propiedades

Para esta categoría, ninguna de las personas participantes destaca en su narrativa algún aspecto sobre la argumentación matemática de los atributos o cualidades de un concepto o procedimiento vinculado al tema.

Conocimiento sobre representaciones

Respecto a las formas de hacer presente algún concepto matemático sobre el tema, cuatro de las personas docentes se refieren a los distintos sistemas de representación. Particularmente sugieren el uso de sistemas de representación diversos. Por ejemplo, P4 refiere al uso del sistema de representación icónico; mientras que P1 y P3 sugieren el uso del sistema de representación tabular.

Participante P4: “los términos de variable dependiente e independiente, me parece que pueden ilustrarse mejor con diagramas de Venn donde se muestran situaciones cotidianas”.



Participante P1: “presentaría el ejercicio en una tabla que permita analizar el comportamiento de la función”.

Participante P3: “se puede trabajar con una tabla donde se indique los kilómetros adicionales y su costo, sin decir la palabra depende”

Por último, es conveniente acotar que P5 reconoce en los temas abordados (relación, dependencia) el potencial que tienen para promover las representaciones, esto al destacar que “aquí es una gran oportunidad para fomentar el proceso de representar” cuando refiere a uno de los procesos matemáticos propuestos en el currículo de matemática para la educación secundaria en Costa Rica.

Conocimiento sobre definiciones

Este análisis no identificó aspectos en que las personas participantes destacan un concepto matemático, a partir del conjunto de proposiciones que lo definen de manera precisa y única, sino que utilizan el término matemático –al cual refiere el concepto– para mencionar algún aspecto de la situación analizada.

Conocimiento sobre procedimientos

En relación con esta categoría, solo dos participantes refieren al uso de algoritmos tradicionales o alternativos para resolver la tarea mostrada en la grabación. Específicamente, P4 identifica un procedimiento alternativo para resolver uno de los incisos de la tarea propuesta por el profesor observado; este procedimiento consistió en restarle al dinero disponible el monto por el kilómetro fijo y dividir el resultado entre el costo de cada kilómetro adicional, es decir, la persona estudiante resuelve de manera indirecta una ecuación mediante la transposición de términos.

La persona docente P5 identifica el uso del cálculo mental, por parte del profesor observado, al revisar la respuesta de uno de los incisos de la tarea y, además, considera relevante su uso; también identifica el procedimiento alternativo de “prueba y error” utilizado por una persona estudiante para resolver la tarea y destaca que el profesor observado desaprovecha esta particularidad.

Participante P4: “muy importante dar la oportunidad a Luis Carlos [un estudiante del grupo] para que explique otra forma de resolver lo planteado”.

*Participante P5: “me parece muy importante que utilice el cálculo mental [el profesor]”
“[el profesor] no indicó si este procedimiento es correcto o no”*

Estructura matemática

Las manifestaciones sobre las relaciones entre distintos conceptos matemáticos que se abordan en un mismo nivel educativo o en otros se encuentran dentro de los subdominios con escasa referencia; solo cuatro participantes destacan en sus narrativas alguno de sus componentes. Particularmente se resaltan los enlaces potenciador e instrumental que muestran estas relaciones entre conceptos para favorecer su enseñanza y para desarrollar otros conceptos, respectivamente. El enlace transversal carece de evidencias en las narrativas analizadas.

Por ejemplo, en cuanto al enlace potenciador, P3 y P4 destacan el concepto de variable como un elemento para el abordaje del criterio de asociación; por su parte P1 refiere al concepto de función a partir del concepto de relación tratado. Además, P4 y P5 identifican el concepto de ecuación como un instrumento que favorece el desarrollo del concepto de relación.



Participante P4: “la definición de lo que significa la variable x , siento que debió haberse hecho antes, considero que en la construcción del criterio de asociación”.

“En el ejercicio al obtener el monto de 8000 colones y después de los estudiantes haber escrito el criterio de asociación, considero que se debería dar al estudiante un espacio para que formulen la igualdad...”.

Participante P5: “me parece muy bien ya que utiliza habilidades que ya tienen los estudiantes, la resolución de ecuaciones que es fundamental en matemáticas”.

En estos aportes se nota un estrecho vínculo con la experiencia que estas personas docentes participantes han tenido en el proceso de enseñanza de las matemáticas, a lo largo de su carrera profesional.

Práctica matemática

En relación con la identificación de razonamientos que justifican el proceder en la matemática como disciplina científica, se encontraron pocas evidencias al respecto. En particular, solo en dos narrativas se alude a conocimientos vinculados a la generalidad matemática y en tres narrativas a la particularidad matemática. Desde un marco general, solo cuatro de las personas docentes participantes realizan manifestaciones sobre este conocimiento. A continuación, se muestran los resultados obtenidos para cada una de las subcategorías consideradas.

Generalidad matemática

Sobre los aspectos vinculados a las estructuras lógicas generales de pensamiento de la matemática solo dos personas participantes realizan acotaciones al respecto: P1 identifica que el profesor observado realiza

generalizaciones a partir de los insumos presentados por el estudiantado; P6 alude a un razonamiento vinculado a la forma de proceder en matemática, asociado a las distintas formas de resolver un mismo ejercicio.

Participante P6: “considero que el motivar y enseñar que matemática tiene diversos métodos de solución es muy importante.”

Particularidad matemática

Para este indicador, P4, P5 y P6 se refieren a estructuras lógicas específicas de pensamiento para abordar el tema. En general, señalan razonamientos que justifican el proceder en las matemáticas —para el concepto de relación— en el que se diseñan modelos, criterios o fórmulas que asocian variables. Por ejemplo, P5 resalta la importancia de la construcción del modelo (la fórmula) y el grado de eficacia de un procedimiento basado en la “prueba y error”.

Participante P5: “la fórmula, que corresponde al criterio, es correcta en este caso es muy importante en el tema”

“no es eficaz ya que se podría tardar mucho para llegar a la respuesta esperada”

Por su parte, P6 coincide en lo señalado por P5, al identificar que un grupo de estudiantes resuelve la tarea “probando y haciendo aproximaciones, hasta descubrir el monto”; y añade que “yo como docente [P6] hubiera dicho que esta manera está correcta, pero es un poco largo y poco práctico matemáticamente”.

Debido a lo anterior, estos participantes coinciden en una forma específica de proceder en el tema, mediante el establecimiento de una fórmula que relacione las



variables, que conduzca a una mejor comprensión de la situación y al establecimiento de conclusiones sobre esta.

Dominio del conocimiento didáctico del contenido matemático

Los subdominios asociados al conocimiento del contenido matemático, como objeto para ser enseñado y aprendido, a partir de unos estándares de aprendizaje establecidos, adquieren una significativa importancia en este estudio.

La Tabla 2 resalta que el subdominio *enseñanza de la matemática* está presente en todas las narrativas y las demostraciones de sus componentes son significativas en la mayoría de estas. A este subdominio le sigue el *aprendizaje de las matemáticas*, las evidencias de su presencia en las narrativas son destacables.

Los resultados que están vinculados a las categorías definidas dentro del subdominio de conocimiento didáctico del contenido matemático se presentan a continuación. Al igual que en el dominio de conocimiento del contenido matemático, estos se ejemplifican con extractos textuales tomados de las narrativas elaboradas por las personas docentes participantes.

Enseñanza de la matemática

En cuanto al conocimiento de estrategias para la enseñanza del concepto de relación, de medios como soportes para su enseñanza y de las tareas matemáticas escolares como oportunidades de aprendizaje, el análisis realizado acentúa dos categorías:
 1. Metodologías de enseñanza
 2. Medios para la enseñanza.
 Cabe destacar que para este

subdominio se identificaron expresiones que lo evidencian en todas las narrativas.

Metodologías de enseñanza

Los indicadores de conocimiento sobre metodologías de enseñanza en matemáticas son los que mayormente emergen en seis de las narrativas elaboradas por las personas docentes participantes. Por ejemplo, P2, P4, P5 y P6 refieren a la estrategia que utiliza el profesor observado para la resolución de la tarea propuesta y cómo esta puede incidir en la participación estudiantil durante el proceso de enseñanza. Algunos de sus comentarios se muestran a continuación.

Participante P2: “El docente plantea en la pizarra el ejercicio como una ecuación, pero no estimula su resolución por parte de los estudiantes, mencionando una forma rápida y “tipo receta”, de cómo resolver la misma, dejando de lado el proceso formal para la resolución de ecuaciones”.

Participante P4: “El profesor hace deducciones que a mi parecer, podría, en vez de él darlas, guiar al estudiante para que él mismo las descubra”.

Participante P5: “Al dar la palabra al estudiante Luis Carlos, supongo que él no quiso acercarse a la pizarra, el docente le permite explicar desde dónde está, lo cual me parece muy positivo, ya que fomenta la

Tabla 2. *Clasificación de las manifestaciones de las personas docentes participantes según el subdominio del conocimiento didáctico del contenido matemático del MTSK*

Subdominio	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Total
Enseñanza de la matemática	7	6	6	12	6	3	1	41
Aprendizaje de las matemáticas	1	0	1	7	3	2	1	15
Estándares de aprendizaje de las matemáticas	0	0	1	0	2	0	0	3

Nota. P=Persona docente participante.



participación a pesar de la razón por la que el joven no quiso explicar al frente”.

Participante P6: “El docente está armando una fórmula general del problema planteado y les dice a los estudiantes que el 600 se multiplica por la variable, sin permitir que sea una deducción de ellos”.

Por otra parte, se identifica la resolución de problemas como una teoría de enseñanza vinculada a la educación matemática, apoyada en estrategias como el trabajo colaborativo y la pregunta dirigida.

Participante P5: “En general es muy importante que se trabaje el tema con la resolución de una situación: problema matemático”.

Participante P3: “Se trabajó en grupos por lo que existe un trabajo colaborativo entre sus estudiantes...lo que contribuye a la formación de un sujeto social, capaz de trascender el individualismo,...”.
“Se demostró el trabajo en equipo entre los integrantes, ya que varios daban opiniones de lo que realizaron como grupo”.

Por último, algunos de los participantes destacan aquellas estrategias que utiliza el profesor observado para la formalización del concepto de relación, a partir de los aportes que hace el estudiantado, y la integración que se hace al cierre de la lección de los conocimientos desarrollados.

Medios para la enseñanza

Las referencias que hacen las personas docentes participantes sobre el uso de recursos o materiales para la enseñanza tienen una presencia importante en las narrativas. Todo el grupo de participantes menciona aspectos de esta categoría.

En primera instancia, se reconoce la pizarra como el recurso disponible para que el profesor observado desarrolle la lección. En relación con esta idea, la mayoría de quienes son participantes señala la eficiencia del recurso acentuando el uso “correcto” de este, de manera que se favorezca el proceso de instrucción. Además, se sugiere el uso de otros recursos como marcadores de distintos colores y materiales en papel que enriquezcan la enseñanza del contenido y, en especial, la resolución de la tarea presentada.

Como ejemplos de lo descrito, P1, P3 y P6 reconocen la pizarra como un medio para la enseñanza; se refieren a la eficiencia de este medio señalando el aporte de su uso y a su eficacia cuando sugieren una mejora basada en la utilización de otros recursos para acentuar su contribución.

Participante P3: “...se debe tratar de utilizar colores [en la pizarra], para estimular la visualización, al menos dos colores”.

Por su parte, los aportes que hacen P2, P3, P4, P5 y P7 destacan la forma en que el profesor observado utiliza la pizarra como recurso; con especificidad apuntan al orden y a la postura del profesor observado en relación con el recurso y el grupo de estudiantes.

Participante P4: “Los datos de los otros grupos que permanecen en la pizarra, al no ser tomados en cuenta, funcionan más como distractores que como insumos a la explicación”.

Participante P7: “La pizarra está muy desordenada y creo que eso no es favorable”.

Tareas para la enseñanza

Respecto a las demandas cognitivas que el profesor observado propone al estudiantado sobre el concepto de relación, se han reconocido manifestaciones de este



conocimiento en tres narrativas. Aunado a esto, dentro del subdominio de enseñanza de la matemática, esta categoría es en la que se identifican menos evidencias. Particularmente, las personas docentes se refieren a dos aspectos de la tarea. Primero, P2 y P4 acentúan la pertinencia y la función que cumple la tarea dentro del proceso de aprendizaje del estudiantado.

Participante P2: “Para la próxima lección el docente debería de retomar el mismo ejemplo, para explicar el concepto de variables dependientes e independientes, además de generar junto con los estudiantes otros ejemplos, donde mencionen e identifiquen las variables dependientes e independientes”.

Participante P4: “El problema planteado me parece oportuno para introducir el tema”.

Segundo, P3 y P4 fijaron su atención en la tarea desde el fenómeno que le da sentido. De esta forma, destacan la situación planteada en el problema, que aproxima la tarea a una parte de la realidad del estudiantado.

Participante P3: “La situación del problema es muy buena para introducir el tema”.

Participante P4: “Bien contextualizado el problema...”.

Aprendizaje de las matemáticas

El conocimiento sobre las particularidades del aprendizaje del concepto de relación se manifiesta en seis narrativas analizadas, pero con una intensidad menor respecto al subdominio enseñanza de la matemática. De las categorías consideradas en este subdominio predomina interacción del alumnado con el contenido matemático, seguida por formas de aprendizaje y fortalezas y limitaciones.

Interacción del alumnado con el contenido matemático

Este conocimiento, que describe las formas en que el estudiantado manipula el contenido matemático, se ha reconocido en la diversidad de procedimientos y estrategias utilizados por el estudiantado para resolver la tarea (P1, P5, P6 y P7), y en los argumentos y explicaciones que se proponen como necesarios para que el alumnado comunique lo que hizo (P4).

Participante P6: “Unos estudiantes lo desarrollaron probando y haciendo aproximaciones, hasta descubrir el monto”.

Participante P4: “Muy importante dar la oportunidad a Luis Carlos [un estudiante del grupo] para que explique otra forma de resolver lo planteado”.

Formas de aprendizaje

En cuanto al conocimiento sobre las maneras en que el estudiantado aprende las matemáticas, P3 y P4 resaltan estilos y estrategias particulares con los que el estudiantado se apropia y comprende el concepto estudiado: relación. Por ejemplo, estas dos personas docentes destacan la incidencia de la presentación de imágenes y la disponibilidad de tiempo para que el estudiantado ejecute la resolución de la tarea.

Participante P3: “Esta sugerencia [uso de una tabla] se da porque es más visual [para el estudiante], y el resultado es diferente a que sea sólo auditiva”.

Participante P4: “Se le puede dar más tiempo al estudiante para que repase (mentalmente y rápido) los conocimientos que obtuvo resolviendo [la tarea]”.

También, se destaca la incidencia que tiene una guía adecuada por parte del profesor observado, cuando se resuelve la tarea, en el proceso de aprendizaje del estudiantado (P4).



Participante P4: “...la construcción del criterio de asociación debe ser en conjunto, profesor y estudiante”.

Fortalezas y limitaciones

Tres personas participantes refieren a las potencialidades o los obstáculos que se presentan durante el aprendizaje. En cuanto a las potencialidades, concebidas como fortalezas para el aprendizaje, P5 subraya el uso de modos de representación.

Participante P5: “Aquí [durante la revisión de las resoluciones de la tarea] es una gran oportunidad para fomentar el proceso de representar”.

Los obstáculos reconocidos en las narrativas de P4 y P6 describen la dificultad que tienen ciertos procedimientos en el tema abordado y el desaprovechamiento que el profesor observado hace de la diversidad de resoluciones de la tarea que muestra el estudiantado, respectivamente, como limitaciones para el aprendizaje.

Participante P4: “...la formulación del criterio de asociación... Normalmente esa parte le resulta difícil a muchos [estudiantes]”.

Participante P6: “Yo como docente hubiera dicho que esta manera es correcta [se refiere a la resolución mostrada por un estudiante], pero es un poco largo y poco práctico matemáticamente. Para luego, abordar la forma del siguiente grupo o estudiante que se le ocurrió restarle los 605 iniciales y dividir”.

Por último, la expresión de la categoría sobre los intereses y expectativas del alumnado hacia las matemáticas es prácticamente nula; solamente se ha identificado en la narrativa de P5 una referencia hacia la motivación que el profesor observado puede promover

durante la enseñanza, como un elemento que incide en las concepciones del estudiantado sobre esta asignatura y su aprendizaje.

Estándares de aprendizaje

A partir del análisis realizado, este subdominio muestra el menor número de manifestaciones en las narrativas elaboradas por las personas docentes participantes. Solo se han reconocido, en dos narrativas, descripciones asociadas a la organización conceptual para la enseñanza de las matemáticas en un nivel escolar específico, en este caso en cuarto año de la educación secundaria en Costa Rica.

Particularmente los aportes se refieren a la utilidad de ciertos conceptos para el desarrollo de los temas, dentro de la secuencia temática establecida en el currículo de matemáticas. Por ejemplo, P5 hace referencia a habilidades y conocimientos fomentados previamente en el estudiantado, que son útiles al abordar el concepto de relación: “utiliza habilidades [el profesor observado] que ya tienen los estudiantes, la resolución de ecuaciones que es fundamental en matemáticas”. En el caso de la narrativa de P3, se destaca la utilidad del tema en desarrollo —el concepto de relación— para el abordaje de temas posteriores: “el tema del problema es muy bueno para introducir los elementos básicos de funciones, términos y conceptos”.

Otros aportes derivados del análisis de las narrativas

De manera complementaria, el análisis ha posibilitado la identificación de otras ideas que no se enmarcan directamente en los subdominios del modelo MTSK, ya que carecen de los principios que definen las categorías que los componen. Algunas de estas ideas toman como fundamento teorías generales de enseñanza y aprendizaje, más cercanas a la



pedagogía que a la didáctica de las matemáticas. Otras apuntan a determinados conceptos matemáticos sin referir de manera amplia y fundamentada a su definición, omitiendo las proposiciones que los definen y los caracterizan de manera única y precisa.

Por ejemplo, P4 señala el concepto de variable; sin embargo, en su narrativa se echa en falta una definición precisa de este concepto. De forma similar, P6 menciona el concepto de variable dependiente, P5 manifiesta el concepto de ecuación y P2 refiere al concepto de función. En todos los casos, no hay una presentación clara y precisa de proposiciones que fundamenten matemáticamente ese conocimiento.

Participante P4: “la definición de lo que significa la variable x , siento que debió haberse hecho antes”.

Participante P6: “[el docente] les señala en la pizarra que C depende de x , una frase corta pero que da una idea clara del tema que están iniciando”.

Participante P5: “el docente iguala 8000 con el criterio”.

Participante P2: “el docente debe aprovechar el contexto del tema, para que los estudiantes inicien con el concepto de función...”

Por otra parte, P3, P5 y P6 destacan las estrategias y la metodología utilizadas por el profesor observado desde un marco general de la pedagogía. La persona docente P7 subraya aspectos de la redacción de la tarea, distantes de elementos como el propósito, la complejidad, la contextualización y las limitaciones para su resolución.

En otro orden de ideas, P2 y P5 fijan su atención en la influencia que ciertos elementos del entorno (dentro y fuera del salón de clase) ejercen en el aprendizaje del estudiantado.

Participante P2: “el sonido ambiente, alrededor del aula puede generar distracción”.

Participante P5: “el docente debe propiciar el silencio como respeto al estudiante participante, además para generar el clima idóneo de atención de toda la clase”.

Por último, es conveniente acotar que en algunas narrativas se han identificado manifestaciones sobre aspectos motivacionales, que pueden incidir en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En detalle, P4 destaca que “se muestra que hay confianza entre el profesor y sus estudiantes, no omiten [los estudiantes] hacer una corrección sobre un dato incorrecto anotado por el profesor”, y P5 refiere a que “una marca [de aprobación] que indique que está correcto [el aporte del estudiantado] motiva para futuras participaciones”.

Conclusiones

El estudio llevado a cabo proporciona fundamento para una serie de afirmaciones en cuanto a la reflexión que realiza un grupo de docentes de matemática de educación secundaria en servicio, cuando observan una grabación en video que muestra a un profesor en una situación de enseñanza y aprendizaje, basada en la resolución de una tarea sobre el concepto de relación.

Las personas docentes, quienes analizaron esta situación de enseñanza sobre el concepto de relación, muestran una tendencia a la identificación de aspectos propios del contenido matemático desde una perspectiva didáctica. Particularmente, movilizan sus conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, propios del dominio de conocimiento didáctico del contenido (Carrillo, *et al.*, 2014).



Una de las referencias más próximas que tiene este profesorado, para reflexionar sobre la práctica de aula, es su experiencia como docentes. A título ilustrativo, se destacan las sugerencias que hacen en cuanto al uso de materiales o recursos, las referencias sobre la utilidad del concepto (o conceptos) que se abordan en la lección, la manera en que el profesor observado imparte la clase y la relevancia de la diversidad de estrategias o procedimientos de resolución de tareas mostrados por el estudiantado.

La reflexión docente que realiza el grupo de participantes está condicionada por el conocimiento de las disposiciones metodológicas del currículo de matemática. Por ejemplo, cuando identifican la tarea que el profesor observado muestra al estudiantado para introducir el tema, estas personas resaltan su contextualización y su aporte dentro de la metodología de resolución de problemas, componentes esenciales del Programa de Estudio de Matemáticas (Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012). Además, las personas docentes señalan algunas formas de hacer presente el concepto de relación. Evidentemente, este hallazgo responde al proceso matemático de representar, que también se promueve en la educación matemática costarricense.

De manera complementaria, cuando las personas docentes participantes reflexionan sobre la práctica docente de un profesor, resaltan elementos de teorías de enseñanza y aprendizaje desde un punto de vista de la pedagogía general; se refieren al contenido matemático, pero sin una descripción oportuna de las proposiciones que lo definen de manera precisa y única; y, finalmente, proyectan la motivación como un componente esencial de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Con fundamento en los resultados obtenidos, se recomienda que se fortalezca la

reflexión docente como competencia profesional del profesorado de matemáticas desde la formación inicial y a través de su vida profesional. En consonancia con Llinares (2013), esta competencia no es innata, debe desarrollarse durante el proceso de formación profesional. Se pretende fomentar la identificación e interpretación de particularidades matemáticas y didácticas de la práctica educativa (la propia y la de otras personas docentes de matemáticas), para fundamentar la toma de decisiones sobre el abordaje de conceptos matemáticos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje en educación secundaria, y para contribuir al crecimiento profesional de quien reflexiona. Para el alcance de estos logros, se sugiere la realización de actividades, inscritas en espacios de reflexión individual y grupal, que implementen el uso de grabaciones en video o la observación de clase, la elaboración de narrativas y el uso de un referente teórico de la didáctica de las matemáticas como fundamento del proceso de reflexión.

Financiamiento

Universidad Nacional, Costa Rica. Proyecto 0110-18. “Conocimiento especializado del profesor de matemática para la enseñanza de los conceptos básicos de función desde la mirada profesional de situaciones de enseñanza”.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y



corrección de este artículo fue el siguiente: MPA. 34 %, JRLF. 33 % y JEG. 33 %. Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [MPA, RLF o JEG], previa solicitud razonable.

Referencias

- Abreu, J. L. (2012). Hipótesis, método & diseño de investigación. *Daena: International Journal of Good Conscience*, 7(2), 187-197.
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, (59), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bardin, L. (2002). *El análisis de contenido*. Editorial Akal.
- Buendía, L., Colás, M. P. & Fuensanta, P. (1998). *Métodos de investigación en psicopedagogía*. McGraw-Hill.
- Caraballo, R. M. (2014). *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas: Una experiencia con profesores* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada, España. <https://digi-ugr.es/handle/10481/35214>
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. & Montes, M. A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones. https://www.researchgate.net/profile/Miguel_Montes/publication/267392675_Un_marco_teorico_para_el_Conocimiento_especializado_del_Profesor_de_Matematicas/links/544e6bd40cf29473161bde8f.pdf
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso* [Tesis doctoral]. Universidad de Huelva, España. <http://hdl.handle.net/10272/2742>

- Climent, N., Romero-Cortés, J. M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C. & Contreras, L. C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 13-36. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362013000100002
- Dolk, M. (1997). Onmiddellijk onderwijsgedrag: *Over denken en handelen van leraren in onmiddellijke onderwijssituaties* [Immediate teaching behaviour: On teacher knowledge and behaviour in immediate teaching situations]. WCC.
- Escudero, D. I., Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L. C. & Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10(1), 53-77. [http://pna.es/Numeros2/pdf/Escudero2015PNA10\(1\)Elconocimiento.pdf](http://pna.es/Numeros2/pdf/Escudero2015PNA10(1)Elconocimiento.pdf)
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, M., Aguilar, A. & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemática, el MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras-González, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes (Eds), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemática* (pp. 70-92). Universidad de Huelva Publicaciones. https://www.researchgate.net/publication/267392675_Un_marco_teorico_para_el_Conocimiento_especializado_del_Profesor_de_Matematicas
- Galleguillos, J., Ribeiro, C. M. & Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemática frente a problemas abiertos. En P. Scott y A. Ruíz (Eds.), *Actas de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Tuxtla Gutiérrez, México: CIAEM-IACME. http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/search/advancedResults
- González-Monteagudo, J. (2001). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: Nuevas respuestas para viejos interrogantes. *Cuestiones pedagógicas*, 15, 227-246. <http://hdl.handle.net/11441/12862>
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.



- Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400. <https://pdfs.semanticscholar.org/9a72/f2765a4e0880a413f32e0a7ddc7e53046b60.pdf>
- Ivars, P., Fernández, C. & Llinares, S. (2016). Cómo estudiantes para maestros miran de manera estructurada la enseñanza de las matemáticas al escribir narrativas. *La matemática e la sua didattica*, 24(1-2), 79-96. <https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica/la-matematica-e-la-sua-didattica/>
- Jiménez, R. (1998). *Metodología de la investigación: Elementos básicos para la investigación clínica*. Editorial Ciencias Médicas.
- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53–70. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.18>
- Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista*, (50), 117-133. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400009>
- Llinares, S. (2016). Enseñar matemáticas y aprender a mirar de manera profesional la enseñanza (Del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente: Mirar profesionalmente). En G. A. Perafán, E. Badillo y A. Aduriz (Coor.), *Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas* (pp. 211-236). Editorial Aula de Humanidades. https://www.researchgate.net/publication/313892381_Conocimiento_y_emociones_el_profesorado_Contribuciones_para_su_desarrollo_e_implicaciones_didacticas
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203471876>
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Autor.
- Ricoy-Lorenzo, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Educação. Revista do Centro de Educação*, 31(1), 11-22. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=117117257002>
- Rojas, N., Carrillo, J. & Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en educación matemática XVI* (pp. 479- 485). SEIEM.
- Sherin, M. G. (2001). Developing a professional vision of classroom events. In T. Wood, B. S. Nelson y J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 75-93). Lawrence Erlbaum.
- Sherin, M., Jacobs, V. & Philipp, R. (Eds.) (2011). *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes*. Taylor & Pearson. <https://doi.org/10.4324/9780203832714>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Morata.



Reflexión docente de una situación de enseñanza y aprendizaje sobre el concepto de relación en educación secundaria (Miguel Picado-Alfaro • José Romilio Loría-Fernández • Jonathan Espinoza-González) Uniciencia is protected by [Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported \(CC BY-NC-ND 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/)